Masterclass: Spelen met Grafen
Kamertjeverhuur

Ruben Hoeksma
r.p.hoeksma@utwente.nl

De wiskunde van kamertjeverhuur

Kamertjeverhuur (engels: *dots-and-boxes*) is een spel voor twee spelers waarbij het doel is zoveel mogelijk kamertjes te 'verhuren'. Een kamer is verhuurd als alle vier de muren zijn geplaatst. Het speelveld bestaat uit een grid van punten. De spelers plaatsen om beurten een muur (een horizontale of verticale lijn tussen twee naburige punten). Als een van de spelers de vierde muur van een kamer plaatst, dan is de kamer door die speler verhuurd en moet hij/zij nog een muur plaatsen. Met speler 1 bedoelen we de speler die als eerst aan zet is.

Vraag 1: Welke speler wint 2×2 kamertjeverhuur?

Vraag 2:

a) Wat is het verband tussen winnen en de laatste muur plaatsen bij kamertjeverhuur?

b) Welke speler kan (bijna) altijd de laatste muur plaatsen bij 2×3 kamertjeverhuur?

c) Wat is de uitzondering?

d) Wat kan speler 1 doen om niet te verliezen?

Kamertjeverhuur als planaire graaf: Het speelveld van $n \times m$ kamertjeverhuur kan beschouwd worden als een planaire graaf met $n \times m$ punten. De gebieden tussen de lijnen van een planaire graaf en het gebied er omheen worden ook wel *faces* genoemd.

Vraag 3:

a) Hoeveel muren worden er geplaatst in $n \times m$ kamertjeverhuur?

b) Hoeveel kamers worden verhuurd in $n \times m$ kamertjeverhuur? Hoeveel faces zijn er?

c) Hoeveel zetten zijn er in $n \times m$ kamertjeverhuur, als de situatie van vraag 2c zich niet voordoet? Hoe beïnvloedt de situatie van vraag 2c het aantal zetten? Kun je aangeven waarom?

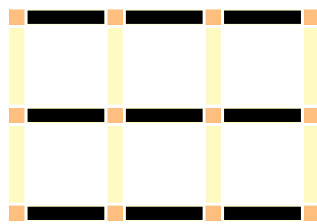
Formule van Euler: Als we met p het aantal punten, met ℓ het aantal lijnen en met f het aantal faces in de graaf aanduiden, dan geldt de volgende gelijkheid voor iedere samenhangende planaire graaf:

$$p - \ell + f = 2 \ .$$

Deze formule wordt ook wel de *Formule van Euler* genoemd.

Vraag 4: Kun je de *Formule van Euler* gebruiken om het aantal zetten in $n \times m$ kamertjeverhuur te berekenen?

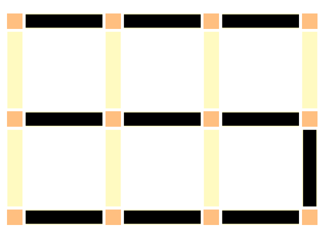
Vraag 5:

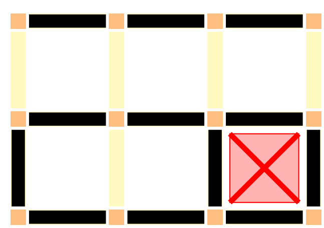


a) Welke speler is aan de beurt in het spel hierboven?

b) Welke speler wint het spel hierboven? (Of eindigt het in gelijkspel?)

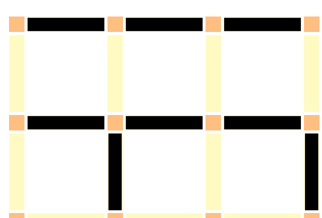
Strategieën: De diagrammen hieronder geven de situatie weer na de zet van speler 2 en de (beste) zet van speler 1. In de rechter diagram komt de situatie voor uit vraag 2c, dit wordt bij kamertjeverhuur ook wel een *double-cross* genoemd.





c) Bij een *double-cross* worden twee kamers met een muur afgesloten. Dit heeft invloed op het aantal zetten. Hoe?

d) Hoe kan speler 2 zorgen dat hij het onderstaande spel wint (speler 1 is aan de beurt)?



e) Waarom is er een verschil tussen ketens (aaneengesloten kamers) van 1 of 2 lang en van 3 of meer kamers lang?

f) Hoe beïnvloedt het aantal ketens van 3 of meer kamers lang de uitkomst van het spel?

Vraag 6: Beschrijf spelstrategiën voor beide spelers voor borden met 4×4, 5×5, 6×6 en $n \times m$ punten. Wat zou de strategie 'spiegelen' kunnen betekenen en waarom kan dit een goede strategie zijn?

Zelf spelen: Kamertjeverhuur wordt het meest gespeeld op een 6×6 bord. Er zijn websites waar je kunt spelen en voor smartphones bestaan ook apps waarmee je het tegen elkaar of de computer kunt spelen. Zoek hiervoor naar 'dots-and-boxes'. Op de volgende pagina's zijn een aantal spelborden van verschillend formaat afgedrukt om zelf te spelen, maar je kunt natuurlijk ook een (ruitjes) schrift gebruiken.

Zelf spelen (4×4)

Zelf spelen (5×5)

Zelf spelen (6×6)