

## **Seminario de Probabilidades**

**Orador:** Hernán Mardones González (Universidad de La Serena)

**Título:** Solución numérica de sistemas de ecuaciones diferenciales estocásticas progresivas y regresivas

**Resumen:** Adjunto

El enlace para conectarse al seminario es:

Unirse a la reunión Zoom

<https://reuna.zoom.us/j/84521834914?pwd=OTZ6Y0NWM3pYTGtTbEt3c0luTG96UT09>

**Miércoles 12 de mayo a las 16:15 horas.**

# Solución numérica de sistemas de ecuaciones diferenciales estocásticas progresivas y regresivas

**Hernán Mardones González\***

Departamento de Matemáticas

Facultad de Ciencias

Universidad de La Serena

Chile

## Resumen

Las ecuaciones diferenciales estocásticas hacia adelante y reversivas (EDEAR) ayudan a describir procesos de difusión relacionados a fenómenos que involucran perturbaciones ambientales. Los términos de tendencia constituyen la parte descriptiva de un ambiente sin aleatoriedad, mientras que los procesos de Wiener describen las perturbaciones aleatorias involucradas en su dinámica mediante coeficientes de difusión.

Dado  $T > 0$ , para un tiempo particular  $t \in [0, T]$  y una posición específica  $x \in \mathbb{R}^d$  interesa estudiar las EDEAR sobre  $[t, T]$  de la forma

$$\begin{cases} X_s = x + \int_t^s b(r, X_r, Y_r) dr + \int_t^s \sigma(r, X_r, Y_r) dW_r, \\ Y_s = g(X_T) + \int_s^T h(r, X_r, Y_r) dr - \int_s^T Z_r dW_r. \end{cases} \quad (1)$$

Aquí  $b : [0, T] \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^d$ ,  $\sigma : [0, T] \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{d \times m}$ ,  $g : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $h : [0, T] \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  son funciones dadas y  $W = (W^1, \dots, W^m)^\top$  es un proceso de Wiener  $m$ -dimensional definido sobre el espacio de probabilidad completo  $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}, \mathbb{P})$ .

Una solución adaptada, bien *no anticipativa*, del sistema de EDEAR se define mediante los procesos

$$(X, Y, Z) \in L^2_{\mathcal{F}}(\Omega; C([t, T]; \mathbb{R}^d)) \times L^2_{\mathcal{F}}(\Omega; C([t, T]; \mathbb{R}^n)) \times L^2_{\mathcal{F}}(\Omega; C([t, T]; \mathbb{R}^{n \times m}))$$

que satisfacen (1)  $\mathbb{P}$ -casi seguramente.

Los sistemas de EDEAR dirigidas por movimiento Browniano están relacionados con ecuaciones diferenciales parciales (EDP) no lineales a través de la ecuación de Feynman-Kac. Por ejemplo, la ecuación  $d$ -dimensional de Burgers

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + (u \cdot \nabla) u + \frac{\nu}{2} \Delta u + f = 0 & ; 0 \leq t < T, \\ u(T, \cdot) = g, \end{cases} \quad (2)$$

donde  $f : [0, T] \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ ,  $g : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$  y viscosidad cinemática  $\nu > 0$ , está asociada al sistema acoplado de EDEAR

$$\begin{cases} X_s = x + \int_t^s Y_r dr + \int_t^s \sqrt{\nu} dW_r, \\ Y_s = g(X_T) + \int_s^T f(r, X_r) dr - \int_s^T \sqrt{\nu} Z_r dW_r. \end{cases} \quad (3)$$

Por lo tanto, la fórmula de Feynman-Kac resulta

$$Y_t = u(t, x); \quad \forall (t, x) \in [0, T] \times \mathbb{R}^d.$$

---

\*e-mail: [hmardo@gmail.cl](mailto:hmardo@gmail.cl)

Observe que la solución determinista  $u(t, x)$  de la ecuación de Burgers (2) se puede obtener a través de la simulación del sistema de EDEAR (3) mediante el proceso estocástico  $Y_t$ . Dado que el proceso  $Y$  es no anticipativo, una estrategia es calcular su esperanza condicional con respecto al evento  $X_t = x$ , con lo cual se evita su dependencia con respecto al proceso  $Z$ .

Durante la exposición, se aborda la simulación numérica de sistemas de partículas estocásticas de acuerdo a sistemas de EDEAR asociados a ecuaciones diferenciales parciales (EDP) de interés. Para ello, se discretizan las ecuaciones localmente en el tiempo y se consideran esquemas de integración de tipo Euler junto con la cuantización de los incrementos de Wiener involucrados. Así, se aproximan las esperanzas condicionales sobre cada nodo de un dominio computacional espacio-temporal uniforme usando parámetros de discretización en tiempo  $h > 0$  y espacio  $\delta > 0$  tales que  $h, \delta \in (0, 1)$  y  $h > \delta$ . Resultados numéricos son presentados para soluciones analíticas espacialmente periódicas, en particular, ecuaciones de Burgers viscosas, un vórtice de Taylor-Green bidimensional y flujos de Beltrami tridimensionales, por ejemplo un flujo de Arnold-Beltrami-Childress. Los algoritmos de simulación son completamente probabilísticos.

Trabajo en conjunto con:

**Antoine Lejay**

INRIA Nancy Grand-Est & Institut Élie Cartan de Lorraine  
France

## Referencias

- [1] C. Navier, Mémoire sur les lois du mouvement des fluides, Mem. Acad. Sci. Inst. France 6 (1822) 389–440.
- [2] G. G. Stokes, On the theories of the internal friction of fluids in motion, and of the equilibrium and motion of elastic solids, Trans. Camb. Phil. Soc. 8 (1849) 287–319.
- [3] R. P. Feynman, Space-time approach to non-relativistic quantum mechanics, Rev. Mod. Phys. 20 (1948) 367–387.
- [4] M. Kac, On distributions of certain Wiener functionals, Trans. Amer. Math. Soc. 65 (1) (1949) 1–13.
- [5] É. Pardoux, S. G. Peng, Adapted solution of a backward stochastic differential equation, Syst. Control Lett. 14 (1990) 55–61.
- [6] J. M. Burgers, A mathematical model illustrating the theory of turbulence, Adv. Appl. Mech. 1 (1948) 171–199.
- [7] F. Delbaen, J. Qiu, S. Tang, Forward-backward stochastic differential systems associated to Navier-Stokes equations in the whole space, Stoch. Proc. Appl. 125 (2015) 2516–2561.
- [8] F. Delarue, S. Menozzi, A forward-backward stochastic algorithm for quasi-linear PDEs, Ann. Appl. Probab. 16 (2006) 140–184.
- [9] F. Antonelli, Backward-forward stochastic differential equations, Ann. Appl. Probab. 3 (1993) 777–793.
- [10] A. J. Majda, A. L. Bertozzi, Vorticity and incompressible flow, Cambridge University Press, Cambridge, 2002.
- [11] H. A. Mardones González, Numerical solution of stochastic differential equations with multiplicative noise, Ph.D. thesis, Universidad de Concepción (2017). <http://repositorio.udec.cl/jspui/handle/11594/2702>

- [12] A. Lejay, H. A. Mardones González, A forward-backward probabilistic algorithm for the incompressible Navier-Stokes equations, J. Comput. Phys, Volume 420, Number 1 (2020).  
<https://doi.org/10.1016/j.jcp.2020.109689>
- [13] S. Corlay, G. Pagès, J. Printems, The optimal quantization website (2005).